## Тема 1.1. Элементы теории погрешностей

[1.1.1. Точные и приближенные числа](#_1.1.1._Точные_и)

[1.1.2. Абсолютная и относительная погрешность](#_1.1.2._Абсолютная_и)

[1.1.3. Тестовые задания по теме «Элементы теории погрешностей»](#_1.1.3._Тестовые_задания)

## **1.1.1. Точные и приближенные числа**

Точность числа, как правило, не вызывает сомнений, когда речь идет о целых значениях данных (2 карандаша, 100 деревьев). Однако, в большинстве случаев, когда точное значение числа указать невозможно (например, при измерении предмета линейкой, снятии результатов с прибора и т.п.), мы имеем дело с приближенными данными.

Приближенным значением **** называется число, незначительно отличающееся от точного значения и заменяющее его в вычислениях. Степень отличия приближенного значения числа от его точного значения характеризуется ***погрешностью***.

Различают следующие основные источники погрешностей:

1. **Погрешности постановки задачи**, возникающие в результате приближенного описания реального явления в терминах математики.
2. **Погрешности метода**, связанные с трудностью или невозможностью решения поставленной задачи и заменой ее подобной, такой, чтобы можно было применить известный и доступный метод решения и получить результат, близкий к искомому.
3. **Неустранимые погрешности**, связанные с приближенными значениями исходных данных и обусловленные выполнением вычислений над приближенными числами.
4. **Погрешности округления**, связанные с округлением значений исходных данных, промежуточных и конечных результатов, получаемых с применением вычислительных средств.

## **1.1.2. Абсолютная и относительная погрешность**

Учет погрешностей является важным аспектом применения численных методов, поскольку погрешность конечного результата решения всей задачи является продуктом взаимодействия всех видов погрешностей. Поэтому одной из основных задач теории погрешностей является оценка точности результата на основании точности исходных данных.

Если  – точное число и **** – его приближенное значение, то погрешностью (ошибкой) приближенного значения **** является степень близости его значения к его точному значению .

Простейшей количественной мерой погрешности **** является абсолютная погрешность, которая определяется как

 (1.1.2-1)

Как видно из формулы 1.1.2-1, абсолютная погрешность имеет те же единицы измерения, что и величина . Поэтому по величине абсолютной погрешности далеко не всегда можно сделать правильное заключение о качестве приближения. Например, если , а речь идет о детали станка, то измерения являются очень грубыми, а если о размере судна, то – очень точными. В связи с этим введено понятие относительной погрешности, в котором значение абсолютной погрешности отнесено к модулю приближенного значения (****).

 (1.1.2-2)

Использование относительных погрешностей удобно, в частности, тем, что они не зависят от масштабов величин и единиц измерений данных. Относительная погрешность измеряется в долях или процентах. Так, например, если

, а , то **,** а если  и ,

то тогда **.**

Чтобы численно оценить погрешность функции, требуется знать основные правила подсчета погрешности действий:

* ***при сложении и вычитании чисел*** абсолютные погрешности чисел складываются

****

* ***при умножении и делении чисел*** друг на друга складываются их относительные погрешности



* ***при возведении в степень приближенного числа*** его относительная погрешность умножается на показатель степени



**Пример 1.1.2-1. Дана функция: . Найти абсолютную и относительную погрешности величины  (погрешность результата выполнения арифметических операций), если значения  известны, а 1 – точное число и его погрешность равна нулю.**



Определив, таким образом, значение относительной погрешности, можно найти значение абсолютной погрешности, как **,** где величина  вычисляется по формуле при приближенных значениях ****

Поскольку точное значение величины  обычно неизвестно, то вычисление и по приведенным выше формулам невозможно. Поэтому на практике проводят оценку предельных погрешностей вида:

 (1.1.2-3)

где  и  – известные величины, которые являются верхними границами абсолютной и относительной погрешностей, иначе их называют – предельная абсолютная и предельная относительная погрешности. Таким образом, точное значение  лежит в пределах:



или





Если величина  известна, то , а если известна величина , то 



Предельная абсолютная погрешность функции вида , дифференцируемой в заданной области, при известных значениях аргументов , а также при известных предельных абсолютных погрешностях аргументов , вычисляется по формуле:

 (1.1.2-4)

а, соответственно, предельная относительная погрешность функции

 (1.1.2-5)

В частном случае для функции от одной переменной (при m=1):



[**Пример 1.1**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/vvm/theme_1/example.asp#ex1)**.2-2**. **Оценить абсолютную и относительную погрешности приближенного   числа  *.***

Число  – трансцендентное число, представляется бесконечной непериодической дробью .

Приближенное значение числа .

Граница абсолютной погрешности , относительная погрешность числа 

[**Пример 1.1.2-3.**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/vvm/theme_1/example.asp#ex2) **Определить значащие цифры числа.**

**Значащими цифрами** числа  ****  называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева. Значащую цифру числа **** называют **верной,** если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Значащие цифры чисел подчеркнуты: ****

[**Пример 1**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/vvm/theme_1/example.asp#ex3)**.1.2-4.** **Определить верные цифры числа  и подчеркнуть**.

Если , то верных цифр в числе **5**:    

Если , то верных цифр в числе **4**:    

Если , то верных цифр в числе **7**:    

Если  то верных цифр в числе **8**:     

[**Пример 1**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/vvm/theme_1/example.asp#ex4)**.1.2-5. Вычислить погрешности арифметических операций средствами MathCad.**

Для оценки погрешностей арифметических операций следует использовать следующие утверждения: абсолютная погрешность алгебраической суммы (суммы или разности ) не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых. Пусть числа **** и **** заданы с абсолютными погрешностями и  **.**

|  |
| --- |
| **Относительная погрешность разности в 2000 раз больше относительной погрешности суммы!**  **Возьмем теперь другие значения x и y и вычислим погрешности произведения и частного**  **Вычислим погрешности произведения и частного:**        **Абсолютная погрешность частного в 20000 раз больше абсолютной погрешности произведения!** |

[**Пример 1.1.2-6**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/vvm/theme_1/example.asp#ex5). **Вычислить погрешности функции средствами MathCad**.

|  |
| --- |
| **Пусть**  **По приведенным начальным условиям считаем,что погрешности равны**    **Значение функции равно** |

## **1.1.3. Тестовые задания по теме «Элементы теории погрешностей»**

1. **Погрешность числа – это**
2. степень отличия приближенного значения числа от точного значения
3. мера неточности числа
4. мера точности числа
5. процент точности числа
6. **Модуль разности между точным и приближенным значением – это**
7. относительная погрешность
8. абсолютная погрешность
9. точность
10. в списке нет правильного ответа
11. **Относительная погрешность выражается отношением**
12. абсолютной погрешности к модулю разности приближенного и точного чисел
13. модуля приближенного числа к абсолютной погрешности
14. абсолютной погрешности к модулю приближенного значения
15. в списке нет правильного ответа
16. **Формула для определения абсолютной погрешности числа это**
17. 
18. 

**3)** 

1. 
2. **Формула для определения относительной погрешности числа – это**
3. 
4. 
5. 
6. 
7. **Абсолютная погрешность числа измеряется**
8. в долях
9. в тех же единицах измерения, что и само число
10. в процентах
11. это безразмерная величина
12. **Относительная погрешность числа измеряется**
13. это безразмерная величина
14. в процентах
15. в процентах или долях
16. в тех же единицах измерения, что и само число
17. **Погрешность, обусловленная выполнением действий над данными, полученными с ограниченной точностью, это**
18. погрешность округления
19. погрешность метода
20. в списке нет правильного ответа
21. неустранимая погрешность
22. **Степень отличия приближенного числа от его точного значения это**
23. погрешность
24. приближение
25. удаление
26. разность
27. **При вычислении погрешности результата сложения двух приближенных чисел**
28. их абсолютные погрешности вычитаются
29. их абсолютные погрешности складываются
30. их абсолютные погрешности делятся
31. их абсолютные погрешности перемножаются
32. **При вычислении погрешности результата, полученного при вычитании из одного приближенного числа другого**
33. их абсолютные погрешности вычитаются
34. их абсолютные погрешности делятся
35. их абсолютные погрешности складываются
36. их абсолютные погрешности перемножаются
37. **При вычислении погрешности результата, полученного при умножении приближенных чисел друг на друга,**
38. их относительные погрешности перемножаются
39. их относительные погрешности вычитаются
40. их относительные погрешности делятся
41. их относительные погрешности складываются
42. **При вычислении погрешности результата, полученного при возведении приближенного числа в степень,**
43. относительная погрешность числа умножается на показатель степени
44. относительные погрешности числа и показателя степени перемножаются
45. относительная погрешность числа делится на показатель степени
46. относительные погрешности числа и показателя степени складываются
47. **Чтобы повысить точность результата вычислений численными методами, надо**
48. увеличить величину заданной погрешности результата
49. уменьшить величину заданной погрешности результата
50. увеличить количество итераций
51. в списке нет правильного ответа
52. **Погрешность численного решения задачи определяется**
53. обусловленностью решаемой задачи
54. погрешностью представления вещественных чисел в компьютере
55. чувствительностью вычислительного алгоритма к погрешностям округления
56. значением исходных данных
57. **Относительной погрешностью приближенного числа, для записи которого использовано выражение , является**
58. 3%
59. 0.3201
60. 320.1
61. 0.003
62. **Абсолютная погрешность приближенного числа 81.12, имеющего относительную погрешность 0.1%, равна**
63. 0.08612
64. 0.008612
65. 8.612
66. 8.612
67. **Абсолютная погрешность разности двух приближенных чисел (), если , а , равна**
68. 0.01
69. 0.21
70. 0.011
71. 0.001
72. **Абсолютная погрешность суммы двух приближенных чисел (), если , а , равна**
73. 0.022
74. 0.012
75. 0.22
76. 0.001
77. **Относительная погрешность произведения двух приближенных чисел (), если , а , равна**
78. 0.002
79. 0.001
80. 0.0021
81. 0.3
82. **Относительная погрешность частного от деления двух приближенных чисел (a/b), если , а , равна**
83. 0.3
84. 0.5
85. 0.002
86. 0.0021
87. **Относительная погрешность результата, полученного при вычислении , если , равна**
88. 0.4
89. 0.1
90. 0.003
91. 0.002